УДК 536.2:539.3

Веселовский В.Б. *–канд. техн. наук, доц., ДНУ*
Веселовский В.В. *– аспирант, ДНУ*
Грибанова А.В. *– магистр, ДНУ*

КОНТАКТНЫЕ ТЕРМИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Выявлена структура формирования температурного поля в системе двух теплоизолированных с боковой поверхности полубесконечных стержней, свободные торцы которых приведены в соприкосновение. Установлено, что при идеальном тепловом контакте при временах, равных временам релаксации теплового потока на стыках стержней, возникает контактное термическое сопротивление.

Введение

На основе обзора и анализа отечественной и зарубежной литературы установлено, что в настоящее время получены теоретические и экспериментальные результаты по контактному термическому сопротивлению (КТС) только для конкретных соединений и условий теплообмена.

Основной проблемой при расчёте температурных полей элементов конструкции, с учётом КТС, является определение его физических параметров. Характерной особенностью КТС является изменение его в широких пределах в зависимости от таких факторов, как нагрузка, сжимающая контакт, геометрические характеристики поверхности, теплофизические и механические свойства материалов контактирующих тел, свойства среды, заполняющей пространство между неровностями поверхностей. К настоящему времени выполнено значительное количество теоретических и экспериментальных работ, в которых изучалось влияние всех основных факторов на КТС.

В связи с тем, что контактный теплообмен характеризуется граничными условиями (ГУ) IV рода, их идентификация в случае не идеального контакта состоит в определении температуры контактирующих поверхностей $T_{n1} = T_{n2}$ и теплового потока q_k через зону контакта по имеющимся данным теплофизического эксперимента, например, по температурам T контактирующих тел. В случае идеального контакта задача сводится к идентификации КТС, которое может быть определено по формуле: $R_k = \dfrac{T_{n1} - T_{n2}}{q_k}$.

Обратная задача по определению ГУ IV рода может быть решена в двух постановках: неэкстремальной и экстремальной (вариационной). В первом случае, полученные в эксперименте температуры подставляются непосредственно в обращённое решение прямой задачи. Во втором случае температура входит в целевой функционал, характеризующий степень соответствия моделируемого поля данным эксперимента. В процессе решения отыскивается минимум этого функционала. В настоящее время унифицированные математические модели, [8] методы определения КТС отсутствуют. В работах [1 – 3] предложены унифицированные математические модели контактного теплообмена в зависимости от условий тепловых воздействий. Модели построены на основе рассмотрения контактного теплообмена для двухслойной системы неограниченных пластин. Для реализации моделей требуются решения соответствующих задач нестационарной теплопроводности для составных тел. Анализ литературы показал, что эффективным методом решения таких задач является операционный метод, основанный на интегральном преобразовании Лапласа. В работе [2] структурным методом получены решения задач контактного теплообмена. Целью данной работы является определение КТС в условиях экстремальных воздействий.

Постановка задачи

Выявим структуру формирования температурного поля в системе двух, теплоизолированных с боковой поверхности, полубесконечных стержней, имеющих разные температуры, свободные торцы которых в определённый момент времени приводим в соприкосновение. Теплофизические свойства стержней разные. Начало координат поместим на поверхности стыковки стержней.

Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\tau_r^{\nu} \frac{\partial^2 T_\nu(x,\tau)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T_\nu(x,\tau)}{\partial \tau} = a_\nu \frac{\partial^2 T_\nu(x,\tau)}{\partial x^2},\ \nu = 1{,}2,\ \ \tau > 0,\ \ x > 0; \quad (1)$$

$$T_\nu(x,0) = T_{\nu,0}; \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial T_\nu(x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_\nu(0 \pm \infty,\tau)}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

$$T_1(0,\tau) = T_2(0,\tau); \quad (5)$$

$$\frac{\lambda_1}{\tau_r^1}\int_0^t \frac{\partial T_1(0,\eta)}{\partial x} e^{\frac{\eta-\tau}{\tau_r^1}}\, d\eta = -\frac{\lambda_2}{\tau_r^2}\int_0^t \frac{\partial T_2(0,\eta)}{\partial x} e^{\frac{\eta-\tau}{\tau_r^2}}\, d\eta\,, \tag{6}$$

где T – температура, τ – время, x – координата, a,λ – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, τ_r – время релаксации теплового потока.

Метод решения. Решение в изображениях краевой задачи (1) – (6) имеет вид:

$$\overline{T_\nu}(x,p) = \frac{T_{1,0}-T_{2,0}}{p}\left(\frac{T_{\nu,0}}{T_{1,0}-T_{2,0}} + \frac{b_\nu\sqrt{\tau_r^\nu p+1}}{b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}+b_1\sqrt{\tau_r^2 p+1}} e^{-\frac{|x|}{\sqrt{a_\nu}}\sqrt{p}\sqrt{\tau_r^\nu p+1}}\right), \tag{7}$$

где $b_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $b_2 = \dfrac{a_2}{a_1}$.

Используя свойство δ-функции, $\delta^{(n)}(\tau) \to p^n$, получим оригинал в виде:

$$T_\nu(x,\tau) = T_{1,0} + (-1)^\nu \cdot (T_{1,0}-T_{2,0}) \cdot b_2 \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{A_{0,\nu}} - \dfrac{1}{A_{0,\nu}} \cdot e^{-\frac{A_{1,\nu}}{A_{0,\nu}}\tau}\left(\dfrac{A_{1,\nu}}{A_{0,\nu}} - \dfrac{\left(B_{0,\nu}^*\right)^2 + \tau_r^\nu}{2!}\right) + \\ + \dfrac{\left(B_{0,\nu}^*\right)^2 \tau_r^\nu}{A_{1,\nu}}\left(e^{-\frac{A_{1,\nu}}{A_{0,\nu}}\tau} + \delta(\tau)\right) - \\ - \dfrac{B_{0,\nu}^*}{\sqrt{\pi\tau}}\left(\dfrac{1}{A_{0,\nu}} + \dfrac{\tau_r^\nu}{A_{1,\nu}}\right) \end{array}\right], \tag{8}$$

где $B_0^* = \dfrac{x}{\sqrt{a_\nu}}$, $A_{0,\nu} = \dfrac{b_1+b_2}{b_\nu}$, $A_{1,\nu} = \dfrac{b_2\tau_r^1 + b_1\tau_r^2}{b_\nu}$.

Без учёта релаксации тепловых потоков $(\tau_r^1 = \tau_r^2 = \tau_r = 0)$ полученное решение (7) переходит в классическое.

Температура поверхности стыковки стержней:

$$\overline{T_1}(0,p) = \overline{T_2}(0,p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{T_{1,0}b_1\sqrt{\tau_r^2 p+1} + T_{2,0}b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}}{b_1\sqrt{\tau_r^2 p+1} + b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}} = \frac{\overline{T_k}(p)}{p}; \tag{9}$$

$$T_1(0,\tau) = T_2(0,\tau) = \frac{b_1 T_{1,0}(1+\frac{1}{2}\tau_r^2) + b_2 T_{2,0}(1+\frac{1}{2}\tau_r^1)}{b_1(1+\frac{1}{2}\tau_r^2) + b_2(1+\frac{1}{2}\tau_r^1)} \tag{10}$$

изменяется после соприкосновения во времени в зависимости от соотношения времён релаксации τ_r^1, τ_r^2 и при больших временах $\tau \to \infty, (p \to 0)$ становится равной классическому значению:

$$\overline{T_{1,кл}}(0,p) = \overline{T_{2,кл}}(0,p) = \frac{1}{p}\left(\frac{b_1 T_{1,0} + b_2 T_{2,0}}{b_1 + b_2}\right) = \frac{T_к}{p}; \tag{11}$$

$$T_{1,кл}(0,\tau) = T_{2,кл}(0,\tau) = \frac{b_1 T_{1,0} + b_2 T_{2,0}}{b_1 + b_2}. \tag{12}$$

Если стыкуются стержни с одинаковыми временами релаксации теплового потока ($\tau_r^1 = \tau_r^2 = \tau_r$), то температура поверхности стыковки стержней устанавливается мгновенно после соприкосновения и остаётся постоянной в процессе теплообмена стержней. Эта температура равна классическому значению.

Если перенос тепла в одном стержне описывается параболическим, а в другом – гиперболическим уравнением теплопроводности, то решение можно представить так:

$$\overline{T_1}(x,p) = \frac{T_{1,0}}{p} + B_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{a_1}}\sqrt{p}\sqrt{\tau_r^1 p+1}}, \quad \overline{T_2}(x,p) = \frac{T_{2,0}}{p} + B_2 e^{-\frac{|x|}{\sqrt{a_2}}\sqrt{p}}; \tag{13}$$

$$T_1(x,\tau) = T_{1,0} + B_1 \cdot \left[\delta(\tau) + \frac{1}{2!}\left(B_{0,\nu}^*\right)^2 \cdot \delta^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2!}\left(B_{0,\nu}^*\right)^2 \tau_r^1 \delta^{(2)}(\tau) - B_{0,\nu}^* \delta^{(1/2)}(\tau) - \frac{1}{2!} B_{0,\nu}^* \tau_r^1 \delta^{(3/2)}(\tau)\right];$$

$$T_2(x,\tau) = T_{2,0} + B_2 \cdot \left[\delta(\tau) + \frac{1}{2!}\left(B_{0,\nu}^*\right)^2 \cdot \delta^{(1)}(\tau) - B_{0,\nu}^* \delta^{(1/2)}(\tau)\right], \tag{14}$$

где B_1, B_2 - константы интегрирования.

Использовав граничные условия, можно найти выражения для величин B_1, B_2 и получить решения в виде:

$$\begin{aligned}\overline{T}_1(x,p) = {} & \frac{T_{1,0}}{p}\left\{1 - \frac{b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}}{b_1 + b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}} \cdot e^{-\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a_1}}\sqrt{\tau_r^1 p+1}}\right\} + \\ & + \frac{T_{2,0}}{p} \cdot \frac{b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}}{b_1 + b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}} e^{-\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{a_1}}\sqrt{\tau_r^1 p+1}};\end{aligned} \tag{15}$$

$$T_1(x,\tau) = T_{1,0} - T_{1,0} \cdot b_2 \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{A_{0,\nu}} - \dfrac{1}{A_{0,\nu}} \cdot e^{-\frac{A_{1,\nu}}{A_{0,\nu}}\tau} \left(\dfrac{A_{1,\nu}}{A_{0,\nu}} - \dfrac{\left(B_{0,\nu}^*\right)^2 + \tau_r^1}{2!}\right) + \\ + \dfrac{\left(B_{0,\nu}^*\right)^2 \tau_r^1}{A_{1,\nu}}\left(e^{-\frac{A_{1,\nu}}{A_{0,\nu}}\tau} + \delta(\tau)\right) - \dfrac{B_{0,\nu}^*}{\sqrt{\pi\tau}}\left(\dfrac{1}{A_{0,\nu}} + \dfrac{\tau_r^1}{A_{1,\nu}}\right) \end{array}\right]; \tag{16}$$

$$\overline{T}_2(x,p)=\frac{T_{2,0}}{p}\{1-\frac{b_1}{b_1+b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}}\cdot e^{-\frac{|x|\sqrt{p}}{\sqrt{a_2}}}\}+\frac{T_{1,0}}{p}\cdot\frac{b_1}{b_1+b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}}e^{-\frac{|x|\sqrt{p}}{\sqrt{a_2}}};\quad(17)$$

$$T_2(x,\tau)=T_{2,0}-\frac{T_{2,0}\cdot b_1}{A_{0,\nu}}\left[\left(1-\frac{B^*_{0,\nu}}{\sqrt{\pi\tau}}\right)-e^{-\frac{A_{1,\nu}}{A_{0,\nu}}\tau}\left(\frac{A_{1,\nu}}{A_{0,\nu}}+\frac{\left(B^*_{0,\nu}\right)^2}{2!}\right)\right];\quad(18)$$

$$\overline{T}(0,p)=\frac{1}{p}\left(\frac{b_1T_{1,0}+b_2T_{2,0}\sqrt{\tau_r^1 p+1}}{b_1+b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}}\right);\quad(19)$$

$$T(0,\tau)=\frac{b_1T_{1,0}+b_2T_{2,0}(1+\frac{1}{2}\tau_r^1)}{b_1+b_2(1+\frac{1}{2}\tau_r^1)}.\quad(20)$$

Анализ решений. Изменение температуры поверхностей торца в месте соприкосновения стержней:

$$\Delta\overline{T}=\frac{1}{p}[T_{\nu,0}-\overline{T_{\kappa}}(p)]=\frac{1}{p}\cdot\frac{b_\nu\sqrt{\tau_r^\nu p+1}(T_{2,0}-T_{1,0})}{b_1\sqrt{\tau_r^2 p+1}+b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1}},\quad(21)$$

где $\overline{T_k}(p)=\overline{T}_1(0,p)=\overline{T}_2(0,p)$.

$$\begin{aligned}\Delta T=&\frac{1}{A_{0,\nu}}-\frac{1}{A_{0,\nu}}e^{-\frac{A_{0,\nu}}{A_{1,\nu}}\tau}+\frac{1}{2!}\frac{\left(B^*_{0,\nu}\right)^2+\tau_r^\nu}{A_{1,\nu}}e^{-\frac{A_{0,\nu}}{A_{1,\nu}}\tau}+\\&+\frac{\left(B^*_{0,\nu}\right)^2\tau_r^\nu}{A_{1,\nu}}\delta(\tau)-\frac{\left(B^*_{0,\nu}\right)^2\tau_r^\nu A_{0,\nu}}{A_{1,\nu}^2}e^{-\frac{A_{0,\nu}}{A_{1,\nu}}\tau}-\\&-\frac{B^*_{0,\nu}}{A_{1,\nu}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\tau^n}{2^{3/2}\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}+n\right)}L_n^{5/2}\left(-2\cdot\frac{A_{0,\nu}}{A_{1,\nu}}\tau\right)+\\&+\frac{B^*_{0,\nu}\tau_r^\nu}{A_{1,\nu}}\left[\left(\frac{A_{0,\nu}}{A_{1,\nu}}\right)^{-3/2}\cdot e^{-\frac{A_{0,\nu}}{A_{1,\tau}}\tau}\cdot erf\left(\sqrt{\frac{A_{0,\nu}}{A_{1,\nu}}\tau}\right)-\frac{2}{\left(\frac{A_{0,\nu}}{A_{1,\nu}}\right)}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\right],\end{aligned}\quad(22)$$

где L_n^α – полином Лагерра, $\Gamma(\beta+n)$ – гамма-функция.

Полученные данные свидетельствуют о том, что причиной формирования температурного поля является разность температур стержней, и объясняют, как именно она преобразуется в температуру контакта стержней и в температуру каждого из стержней в любом сечении x.

Тепловой поток, протекающий через поверхность соприкосновения тел, находим по формуле:

$$\bar{q}_1(0,p)=\bar{q}_2(0,p)=-\lambda_2\frac{d\bar{T}_2(x,p)}{dx}\bigg|_{x=0}= \\ =\frac{\lambda_1}{\tau_r^1 p+1}\frac{d\bar{T}_1(x,p)}{dx}\bigg|_{x=0}=\frac{b_1\cdot b_2\cdot(T_{1,0}-T_{2,0})}{\sqrt{p}(b_1+b_2\sqrt{\tau_r^1 p+1})}. \qquad (23)$$

Применив теорему о начальном значении, получим $q(0,0)=b_1(T_{1,0}-T_{2,0})\cdot\frac{1}{\sqrt{\tau_r^1}}$.

Таким образом, тепловой поток $q(0,0)$ имеет конечное значение $b_1(T_{1,0}-T_{2,0})\cdot\frac{1}{\sqrt{\tau_r^1}}$, тогда как в случае соприкосновения тел, перенос тепла в которых описывают обычным уравнением теплопроводности, тепловой поток $q(0,0)$ должен быть бесконечно большим. В результате:
$\lim\limits_{p\to\infty} p\cdot\bar{T}(0,p)=\lim\limits_{t\to 0}T(0,t)=T_{2,0}$, $\lim\limits_{p\to\infty} p\cdot\bar{T}(0,p)=\lim\limits_{t\to 0}T(0,t)=\frac{b_1T_{1,0}+b_2T_{2,0}}{b_1+b_2}$.

Следовательно, температура $T(0,\tau)$ за промежуток времени, практически соизмеримый со временем релаксации τ_r, изменяется от $T_{2,0}$ до значения $\frac{b_1T_{1,0}+b_2T_{2,0}}{b_1+b_2}$, которое мгновенно устанавливается при соприкосновении стержней, в которых перенос тепла описывают уравнением Фурье.

Выявим структуру переноса тепла в полуограниченном стержне, теплоизолированном с боковой поверхности, на торец которого поступает изменяющийся во времени тепловой поток.

Математическую формулировку задачи запишем следующим образом:

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial \tau}+\tau_r\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}; \qquad (24)$$

$$T(x,0)=0; \qquad (25)$$

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0}=0; \qquad (26)$$

$$T(\infty,\tau)=0; \qquad (27)$$

$$-\lambda\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=0}-\tau_r\frac{\partial q}{\partial \tau}=q(0,\tau),\ \ \tau\ge 0; \qquad (28)$$

$$\frac{\tau_r}{a}p^2\bar{T}(x,p)+\frac{1}{a}p\bar{T}(x,p)=\frac{d^2\bar{T}(x,p)}{dx^2}; \qquad (29)$$

$$\bar{T}(\infty,p)=0; \qquad (30)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial \overline{T}(x,p)}{\partial x} \right|_{x=0} - \tau_r p \cdot \left. \overline{q}(x,p) \right|_{x=0} = \overline{q}(0,p). \qquad (31)$$

Решение в изображениях краевой задачи (24) – (31) имеет вид:

$$\overline{T}(x,p) = A \cdot e^{x\sqrt{\frac{\tau_r}{a}p^2 + \frac{1}{a}p}} + B \cdot e^{-x\sqrt{\frac{\tau_r}{a}p^2 + \frac{1}{a}p}}.$$

Использовав граничные условия, можно найти выражения для констант интегрирования A, B.

Получим решение в виде:

$$\overline{T}(x,p) = -\frac{\tau_r p + 1}{\lambda\sqrt{\frac{\tau_r}{a}p^2 + \frac{1}{a}p}} \overline{q}(0,p) \cdot e^{-x\sqrt{\frac{\tau_r}{a}p^2 + \frac{1}{a}p}};$$

$$\overline{q}(x,p) = \overline{q}(0,p) \cdot e^{-x\sqrt{\frac{\tau_r}{a}p^2 + \frac{1}{a}p}}.$$

Таким образом, операторы распространения температуры и теплового потока содержат в показателе экспоненты множитель $\sqrt{\frac{\tau_r}{a}p^2 + \frac{1}{a}p}$, который учитывает влияние конечной скорости распространения тепла.

Сравнение температурных полей для составных тел, полученных структурным и численным методами приведено в [10]. Тестовые примеры для гиперболического уравнения теплопроводности выполнены для неограниченной пластины. Численные результаты решения, полученные с использованием функции Грина, согласуются со структурным решением.

Численные параметрические исследования

Как пример, рассмотрена задача о нагреве составной конструкции в виде системы двух неограниченных стержней (Ст 15 – изолятор Al_2O_3). На внешней границе (изолятор) заданы граничные условия первого рода, внутренняя граница теплоизолирована. На стыке слоев заданы условия идеального теплового контакта. Геометрические и теплофизические параметры принимаются следующие: $R_1 = R_2 = 30 \cdot 10^{-3}\, м$, $a_1 = 0{,}028 \cdot 10^{-3}\, м^2/с$, $a_2 = 0{,}0692 \cdot 10^{-4}\, м^2/с$.

Результаты параметрических исследований КТС приведены в таблицах 1, 2. Модель 1 соответствует системе параболических уравнений, 2 – системе гиперболических уравнений, 3 – системе интегродифференциальных уравнений.

Таблица 1

Граничные значения контактного термического сопротивления

Граничная температура, $^{\circ}C$	500	1000	1500
Модель 1	0,43	6,32	6,49
Модель 2	0,86	12,41	12,57
Модель 3	8,28	8,66	10,80

Таблица 2

Граничные значения контактного термического сопротивления

Граничная температура, $^{\circ}C$	500	1000	1500
Модель 1	2,13	4,89	6,32
Модель 2	4,28	9,90	12,52
Модель 3	4,42	13,52	24,69

В табл. 1 приведены предельные значения КТС при $\tau_{r,1} = 10^{-9} c$, $\tau_{r,2} = 10^{-10} c$, $\tau_{э,1} = 10^{-10} c$, $\tau_{э,2} = 10^{-12} c$. В табл. 2 – $\tau_{r,1} = 10^{-8} c$, $\tau_{r,2} = 10^{-10} c$, $\tau_{э,1} = 10^{-9} c$, $\tau_{э,2} = 10^{-12} c$.

Выводы

Полученные решения содержат постоянные $\lambda, a, \tau, \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}$, которые характеризуют релаксирующий процесс теплопроводности в среде.

При экстремальных тепловых воздействиях тепло, подведённое к поверхности, концентрируется в тонком слое вещества вблизи поверхности, и амплитуда колебаний температуры должна неограниченно возрастать.

Влияние конечной скорости распространения тепла на амплитуду, затухание и фазу температурных колебаний может быть использовано для экспериментального определения скорости распространения тепла или времени релаксации теплового потока.

Список литературы

1. Веселовский В.В. Математические модели и определение контактного термического сопротивления в элементах конструкций / В.В. Веселовский // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д.: ДНУ, 2006. – С. 88 – 95.

2. Веселовский В.В. Решение задач контактного теплообмена структурным методом / В.В. Веселовский // Металлургическая теплотехника. – Д.: Пороги, 2007. – С. 62 – 70.

3. Веселовский В.В. Математические модели и расчётно-экспериментальное определение контактних термических сопротивлений / В.В. Веселовский, А.В. Берлов, Т.М. Босенко // Материалы VI Минского международного форума по тепломассообмену. – Минск: ТМО НАН Беларуссии, 2008. – С. 47 – 58.

4. Веселовский В.Б. Визначення контактних термічних опорів в умовах екстремальних теплових дій / В.Б. Веселовський, В.В. Веселовський, А.В. Грибанова // Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу. – Д.: ДНУ, 2008. – С. 132 – 135.

5. Шлыков Ю.П. Контактное термическое сопротивление / Ю.П. Шлыков В.А. Ганин, С.Н. Царевский // – М.: Энергия, 1977. – 323 с.

6. Карножицкий В.Н. Контактный теплообмен в процессах литья / В. Н. Карножицкий // – К.: Наук. думка., 1978. – 300с.

7. Веселовский В. Б. Контактное термическое сопротивление в многослойных элементах конструкций / В.Б. Веселовский // Гидрогазодинамика и процессы тепломассобмена. – К.: Наук. думка, 1986. – С. 120 – 125.

8. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. / Ю.М. Мацевитый // – К.: Наук. думка, 2003. – 1. – 460 с.; 2. – 392 с.

9. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, В.В. Калашников // – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.

10. Веселовский В.Б. Структурный метод решения задач теплопроводности для составных сред при экстремальных воздействиях / В.Б. Веселовский // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д.: ДНУ, 2006. – С. 55 – 67.

11. Веселовский В. Б., Веселовский В.В., Грибанова А.В. Определение контактных термических сопротивлений в условиях экстремальных тепловых воздействий / В.Б. Веселовский, В.В. Веселовский,

А.В. Грибанова // Динаміка та міцність машин, будівель, споруд: Зб. наук. пр. Полт. НТУ. – Полтава, 2009. – С. 182 – 188.

12. Model R. Thermal Transport Properties of Layered Materials: Identification by a new Numerical Algorithm for Transient Measurements / R. Model // Int. J. Thermophys. – 2005. – V. 26, No 1. – P. 165 – 178.

Рукопись поступила 01.07.2009 г.