

*Веселовский В.Б.* – канд. физ.-мат. наук, доц., ДНУ

*Босенко Т.М.* – аспирант, ДНУ

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОГО НАГРЕВА ТВЁРДЫХ ТЕЛ

*Представлены и проанализированы аналитические решения уравнения теплопроводности гиперболического и интегро-дифференциального уравнений при импульсном режиме нагрева твёрдых тел. Общее решение получено для произвольных по времени импульсов. Рассмотрен предельный случай импульсного воздействия на материалы.*

### Введение

В настоящее время всё более широкое практическое применение находят конструкционные материалы на основе модификационного упрочнения импульсным воздействием на материал. Возникает проблема определения и расчёта на прочность конструкции, теплового и напряжённно-деформационного состояния системы. Появилась существенная потребность в создании и описании данных процессов с помощью уравнений обобщённого вида, учитывающих не только нынешнее состояние системы, но и предысторию воздействий на материал.

Рассмотрен пример нагрева пластины с внутренним источником, обладающим релаксационными свойствами во время импульсного режима.

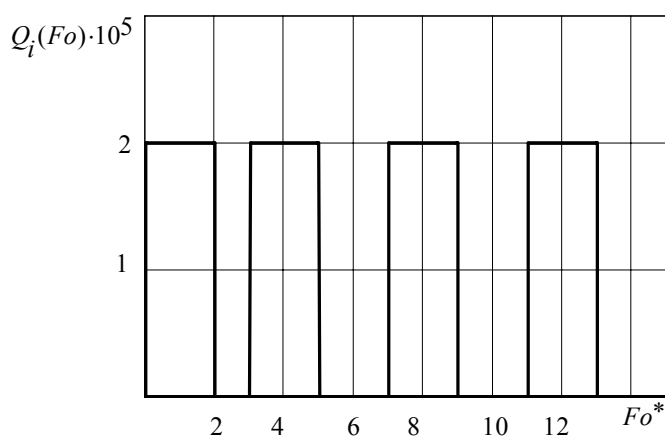


Рис. 1. Импульсное воздействие граничных функций  $Q_i(Fo)$  на поверхности материала,

$$Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$$

### Постановка задачи

Для данного режима нагрева используется уравнение нестационарной теплопроводности гиперболического типа [1]:

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo_i} + Fo_i^r \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial Fo_i^2} = \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial X^2} + W \left( 1 + Fo_i^r \frac{\partial}{\partial Fo_i} \right), \quad (1)$$

где  $i$  – номер импульса.

Краевые условия для  $i = 1, 2$ :

– начальные условия

$$\begin{cases} \Theta_2|_{Fo=0} = \Theta_1(X, \Delta Fo_1), \\ \left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial Fo} \right|_{Fo=0} = \frac{\partial \Theta_1(X, \Delta Fo_1)}{\partial Fo}, \end{cases} \quad (2)$$

– граничные условия

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} \right|_{X=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} \right|_{X=1} = Q_1(\Delta Fo_1). \end{cases} \quad (3)$$

Для  $i > 2$ :

– начальные условия

$$\begin{cases} \Theta_{i+1}|_{Fo=0} = \Theta_i(X, \Delta Fo_i), \\ \left. \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial Fo} \right|_{Fo=0} = \frac{\partial \Theta_i(X, \Delta Fo_i)}{\partial Fo}, \end{cases} \quad (4)$$

– граничные условия

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial X} \right|_{X=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial X} \right|_{X=1} = Q_i(\Delta Fo_i). \end{cases} \quad (5)$$

При решении задачи (1) – (3) операционным методом, система в поле изображений примет вид [2, 3]:

$$(Fo^r \cdot p^2 + p) \cdot \Theta_2 - \Theta_1(X, \Delta Fo_i) - \frac{\partial \Theta_i(X, \Delta Fo_i)}{\partial Fo} = \frac{d^2 \Theta_2}{dX^2} + W^*(X, Fo). \quad (6)$$

Решение (6) представлено в виде суперпозиции предыстории учёта импульсного режима при нагреве материала:

$$\Theta_2(X, p) = A_2 ch \sqrt{\eta_2} X + B_2 sh \sqrt{\eta_2} X + R_{\Theta_2} + R_{W^*}, \quad (7)$$

$$R_{\Theta_1}(X, p) = \sum_{n=0}^i \left[ \frac{1}{(p + Fo^r p^2)^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dX^{2n}} R_{\Theta_n} \right] - \quad (8)$$

приращение температуры, возникающее за счёт воздействия предыдущего импульса,

$$R_{\Theta_2}(X, p) = \sum_{n=0}^{i+1} \left[ \frac{1}{(p + Fo^r p^2)^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dX^{2n}} R_{W_n^*} \right] - \quad (9)$$

приращение температуры, возникающее за счёт воздействия последующих импульсов.

Процессы, возникающие при импульсном режиме нагрева, распространяющиеся в виде бегущих волн, изучаются с помощью автономной переменной  $X \rightarrow X - V$ , где  $V$  – скорость распространения бегущей волны. Тогда источник тепла в материале принимает вид:

$$Q_i = W_i^* + Fo_i^r \cdot V \frac{dW_i^r}{dX}. \quad (10)$$

При условии, что  $W$   $n$  – раз дифференцируема по координате, тогда для  $i$  – го импульса  $W_i \approx \delta_i(X, \Delta e)$ , где  $\delta_i(X, \Delta e)$  – дельта-функция Дирака,  $\Delta e$  – приращение внутренней энергии за промежутки времени воздействия импульса, тогда:

$$\Theta_2(X, p) = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Theta_1^k(0 \Delta Fo_i)}{k!} X^k \right\}}{ch \sqrt{\eta_2}} ch \sqrt{\eta_2} X + \delta_{\Theta_2}(X, p) + \delta_{W_2}(X, p). \quad (11)$$

Анализ теплового состояния системы при малых временах ( $Fo^* \ll Fo$ ), малых геометрических параметрах ( $l \ll L$ ), где  $L$  – толщина образца,  $Fo^*$  – время порядка времени релаксации процесса нагрева (охлаждения) показывает, что при  $X \rightarrow 1$ :

$$\delta_{\Theta_1}(X, p) \rightarrow \delta_{\Theta_1}(p), \quad (12)$$

$$\delta_{W_1^*}(X, p) \rightarrow \delta_{W_1^*}(p). \quad (13)$$

Суммирование функций (12) – (13) по всем интервалам  $Fo_i$  приводит к образованию релаксационных функций теплового потока и внутренней энергии:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k-1} \Theta_k(p) \rightarrow \alpha(p), \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k-1} W_k^*(p) \rightarrow \beta(p). \quad (15)$$

Учитывая (14) – (15), для достаточно больших  $k$  ( $k \rightarrow \infty$ ) при импульсном режиме, гиперболическое уравнение (1) и решение (11) при переходе в поле оригиналов принимает вид интегро-дифференциального уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
 & Fo_{k+1}^r \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial Fo^2} + \tau_{0,k+1} \frac{\partial \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial Fo} + \\
 & + Fo_{k+1}^r \int_0^\infty \beta'_{k+1}(s) \frac{\partial \Theta_{k+1}(X, Fo-s)}{\partial Fo} ds = \beta_{k+1}^* \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial X^2} + \\
 & + \int_0^\infty \alpha'_{k+1}(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo-s)}{\partial X^2} ds + W_{k+1}^*(X, Fo),
 \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\int_0^\infty \alpha(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}}{\partial Fo^2} d(X, Fo-s) \approx \sum_{k=0}^\infty \left[ \delta_{\Theta_k} \left( \sum_{i=0}^n \Theta_i(X, \Delta Fo_i) \right) \right] - \text{внешняя}$$

составляющая учёта предысторий изменения температурного возмущения при импульсном воздействии на материал;

$$\int_0^\infty \beta(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}}{\partial X^2} d(X, Fo-s) \approx \sum_{k=0}^\infty \left[ \frac{d\delta_{W_k}}{dX} \left( \sum_{j=0}^m \Theta_j(X, \Delta Fo_j) \right) \right] - \text{внутренняя}$$

составляющая учёта предысторий температурного возмущения при импульсном воздействии на материал. Тем самым вычисление последующих импульсов (их величины) приводит к априорному определению количества импульсов – их длительности, мощности, после действия которых, происходит нагрев образца либо прогрев определённого количества слоёв (для многослойной конструкции).

Проведенный численно-параметрический расчёт материала на основе полученных результатов демонстрирует, что при постоянном (рис. 2а, рис. 2b) и импульсном (рис. 3а, рис. 3b) режимах величина релаксационной (неустановившейся) температуры не отличается от температуры, полученной из интегро-дифференциального уравнения, которое учитывает предысторию нагрева образца импульсным и пульсационным внешними источниками. Тем самым доказана иерархия построения модели определения температурных полей нестационарной теплопроводности, которые описываются параболическими, гиперболическими (в случае теплового удара, импульсного нагрева).

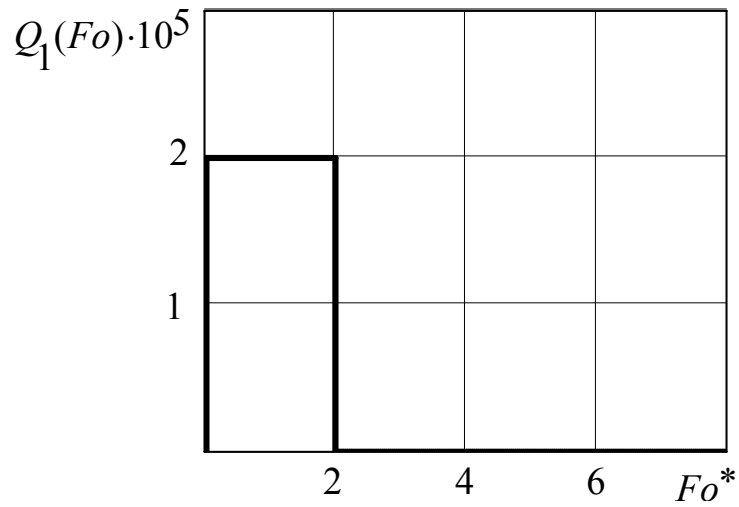


Рис. 2а. Импульсный нагрев материала точечным внешним источником, время нагрева  $Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$

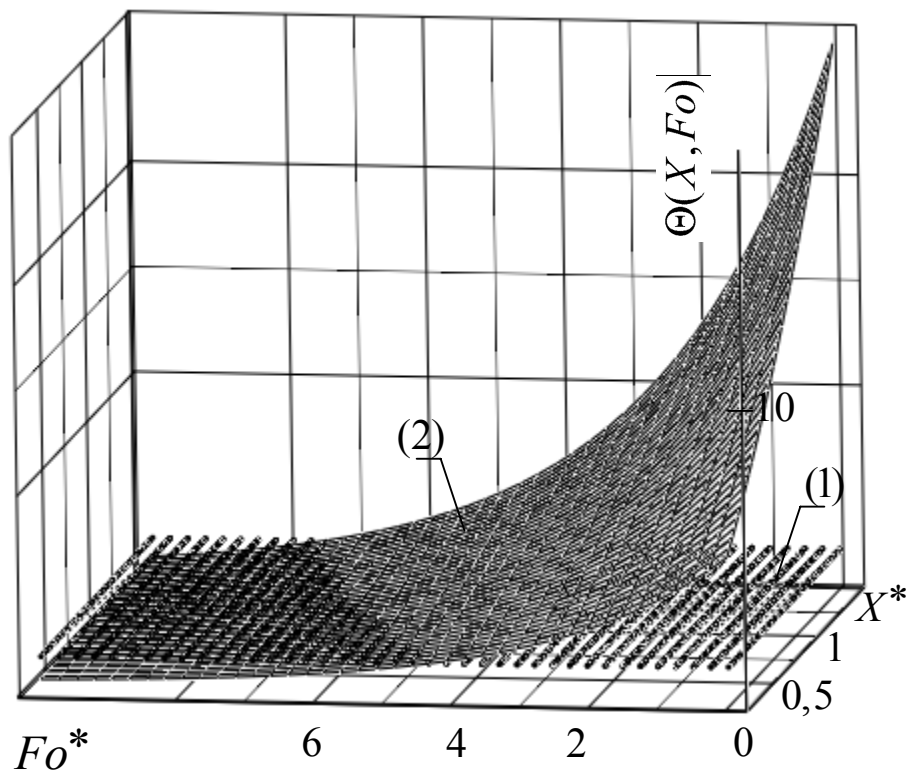


Рис. 2б. Распределение температурного поля параболического (1) и гиперболического (2) уравнений при временах импульсного нагрева  $Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$ ,  $X^* = X \cdot 10^{-3}$

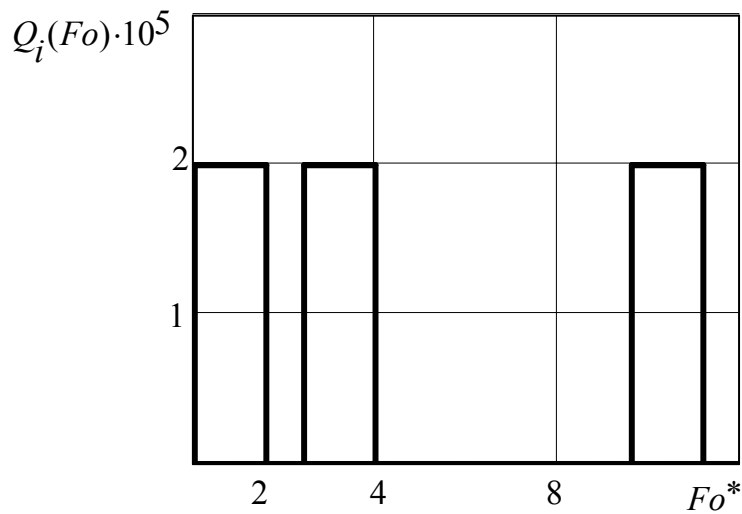


Рис. 3а. Импульсный нагрев материала точечным внешним источником, время нагрева  $Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$

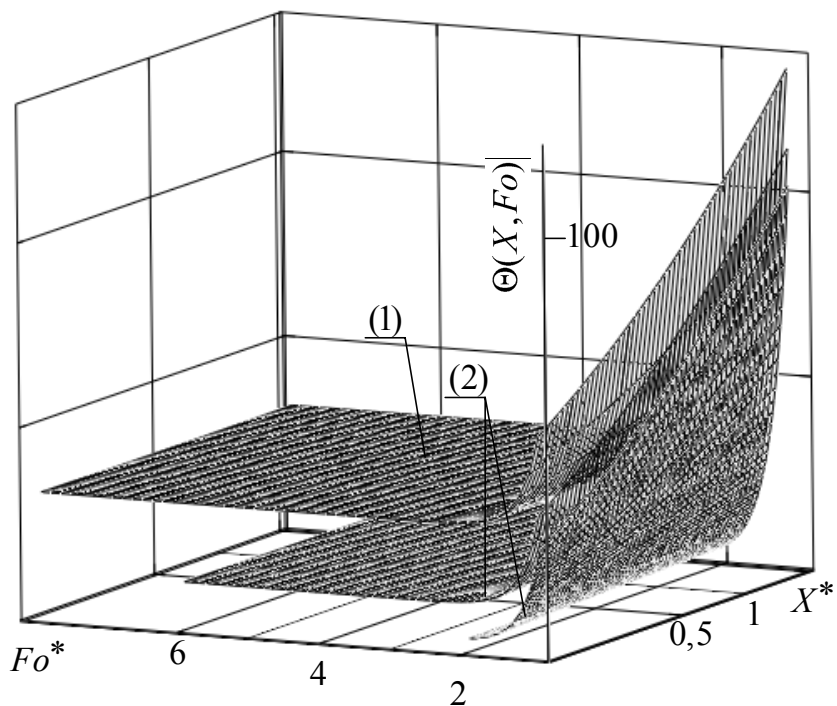


Рис. 3б. Распределение температурного поля интегро-дифференциального уравнения с учётом предыстории теплового нагрева (1), гиперболического уравнения при импульсном режиме (2),  $Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$ ,  $X^* = X \cdot 10^{-3}$

Иерархическая последовательность математических моделей, составленная из последовательности уравнений в частных производных параболического и гиперболического типов, порядок которых увеличивается с увеличением степени отклонения системы от локального равновесия, приводит к интегро-дифференциальному уравнению в общем случае и описывает состояние системы с учётом предыстории длительного и импульсного режимов нагрева твёрдого тела, асимптотика которого и позволяет получать значения температур, тепловых возмущений решений параболического и гиперболического уравнений. Следует отметить, что процедура расписания за малым параметром изменения температуры (или несколькими параметрами) также может оказаться полезной при введении различных законов граничного перехода, которые определяют взаимное поведение параметров разложения при стремлении их к нулю. Предлагаемые неравновесные модели процессов переноса, с одной стороны, находятся в соответствии с существующими версиями неравновесной термодинамики, а с другой стороны, расширяют круг возможных объектов исследований и имеют относительно простой вид, что позволяет использовать их для анализа конкретных физических ситуаций. Проведенные на основе этих моделей исследования показали, что неравновесные эффекты оказывают определяющее влияние на механизм и основные закономерности распространения скоростных волн и могут быть приведены к обобщённому уравнению нестационарной теплопроводности – интегро-дифференциальному уравнению теплопроводности с учётом тепловой памяти [6].

### **Выводы**

Полученные результаты при импульсном упрочнении и разрушении твёрдых материалов позволяют определять как глубину проникновения в поверхностном слое материала, так и величину внешнего воздействия на конструкцию, в результате чего возникает локальная неравновесность, которая приводит к заметно снижающимся тепловым и механическим свойствам материала. Возможность определить толщину прогрева многослойной конструкции внешним источником, используя структурность решения гиперболического и интегро-дифференциального уравнений, приводит к рациональной эффективности использования теплозащитных конструкций и материалов.

### **Список литературы**

1. Веселовский В.Б., Босенко Т.М. Структурный метод решения задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учётом тепловой памяти // VI Минский международный форум по теплообмену. – Минск. – 2008. – С. 64.

2. Веселовский В.Б., Сова Ю. А., Босенко Т. М. Задачи теплопроводности для составных сред с тепловой памятью // *Металлургическая теплотехника*. – Днепропетровск: Пороги, 2005. – С. 20 – 31.

3. Веселовский В.Б., Малая Ю.А., Босенко Т.М. Задачи теплопроводности для составных сред при экстремальных условиях // *Вестник Херсонского национального университета*. – Херсон, 2006. – С. 101 – 105.

4. Веселовский В.Б., Босенко Т.М., Горелова К.В. Решение задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учётом тепловой памяти // *Вестник ХНТУ*. – Херсон. – Вып. 2 (28), 2007. – С. 87 – 92.

5. Веселовский В.Б., Босенко Т.М., Горелова К.В. Структурный метод решения задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учётом тепловой памяти // *Металлургическая теплотехника*. – Днепропетровск: «ПП Грек О.С.», 2007. – С. 44 – 52.

6. Босенко Т.М. Численный метод решения задачи теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учетом тепловой памяти // *Диференціальні рівняння та їх застосування*. – Дніпропетровськ: Зб. наук. пр. ДНУ. – 2007. – С. 111 – 117.

*Рукопись поступила 07.04.2008 г.*