УДК 536.24

Румянцев В.Д. *– канд. техн. наук, проф., НМетАУ*

ВЫРАВНИВАНИЕ ТЕМПЕРАТУР В ТЕЛЕ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ЭНТАЛЬПИИ I_0 = CONST

Приводится математическое описание процесса выравнивания температур в теле при постоянной энтальпии.

На практике возможны случаи, когда разность температур на поверхности и в центре тела недопустимо велика, например, в таком состоянии могут находиться слитки после разливки стали. Такое тело может не нуждаться в нагреве, необходимо поместить его в «термос», чтобы выровнять температуры по массе тела.

Решение такой задачи получается, если в известных решениях [1, 2] с начальным неравномерным температурным полем $t(x, \tau = 0) = f(x)$ при $q_{пов}$ =   = const положить значение $q_{пов} = 0$.

Пластина:

$$t(x, Fo) = \frac{1}{R}\int_0^R f(x)dx + \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^R f(x)\cos\frac{n\pi x dx}{R}\right)\cos\frac{n\pi x}{R}\exp\left(-n^2\pi^2 Fo\right), \quad (1)$$

где R – половина толщины пластины, м; f(x) – произвольное начальное распределение температур в пластине , ºC.

В конце охлаждения или нагрева тела с $q_{по}$ = const имеется температурное поле в виде квадратной параболы с разностью температур между поверхностью и центром $\Delta t_0 = t_{по} - t_{цо}$, которое является отрицательной $\Delta t_0 < 0$ при охлаждении тела и положительной $\Delta t_0 > 0$ при нагреве:

$$t(x, 0) = f(x) = t_{цо} + \Delta t_0 (x/R)^2, \quad (2)$$

$$\left|\Delta t_0\right| = \frac{q_{по} R}{K_2 \lambda}, \quad (3)$$

где $q_{по}$ – плотность теплового потока, при которой закончился нагрев или охлаждение тела, Вт/м^2.

Решение для выравнивания температур в пластине при I_0 = const ($\bar{t}_0$ = const) получим подстановкой начального температурного поля (2) в (1):

© Румянцев В.Д., 2008

$$\frac{t(x/R,Fo)-t_{цо}}{\Delta t_0}=\frac{1}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\mu_n^2}\cos\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right) \tag{4}$$

или

$$\frac{t(x/R,Fo)-\bar{t}_0}{\Delta t_0}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\mu_n^2}\cos\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right), \tag{5}$$

$$\mu_n = n\pi \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Здесь $\bar{t}_0 = t_{цо} + \Delta t_0/3$ – начальная среднемассовая температура, ºС.

Температуры на поверхности и в центре пластины:

$$\frac{t_п(Fo)-\bar{t}_0}{\Delta t_0}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\mu_n^2}\cos\mu_n\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right); \tag{6}$$

$$\frac{t_ц(Fo)-\bar{t}_0}{\Delta t_0}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\mu_n^2}\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right). \tag{7}$$

Разница температур в теле:

$$\frac{t_п(Fo)-t_ц(Fo)}{\Delta t_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\mu_n^2}(1-\cos\mu_n)\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right). \tag{8}$$

Распределение плотности тепловых потоков по толщине тела:

$$q(x/R,Fo)=\frac{q_{по}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right). \tag{9}$$

Круглый цилиндр неограниченной длины:

$$t(x/R,Fo)=\frac{2}{R^2}\int_0^R xt(x,0)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)}{I_0^2(\mu_n)}\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right)\frac{2}{R^2}\int_0^R xt(x,0)I_0\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)dx, \tag{10}$$

где I_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для начального распределения температур по закону квадратной параболы (2) из (10) получаем:

$$\frac{t(x/R,Fo)-t_{цо}}{\Delta t_0}=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\mu_n^2 I_0(\mu_n)}I_0\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right); \tag{11}$$

$$\frac{t(x/R,Fo)-\bar{t}_0}{\Delta t_0}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\mu_n^2 I_0(\mu_n)}I_0\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right); \tag{12}$$

$$\frac{t_п(Fo)-\bar{t}_0}{\Delta t_0}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\mu_n^2}\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right); \qquad (13)$$

$$\frac{t_ц(Fo)-\bar{t}_0}{\Delta t_0}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\mu_n^2 I_0(\mu_n)}\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right); \qquad (14)$$

$$\frac{\Delta t(Fo)}{\Delta t_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\mu_n^2}\left[\frac{1}{I_0(\mu_n)}-1\right]\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right); \qquad (15)$$

$$\bar{t}_0=t_{цо}+\frac{\Delta t_0}{2}; \qquad (16)$$

$$q(x/R, Fo)=\frac{q_{по}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\mu_n I_0(\mu_n)}I_1\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right), \qquad (17)$$

где I_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка; μ_n– корни характеристического уравнения $I_1(\mu) = 0$.

Аналогично получаем решения для шара, используя решение, приведенное в [2].

В качестве примера применения приведенных выше решений рассмотрим расчет выравнивания температур в стальной пластине толщиной 400 мм после ее охлаждения с постоянной поверхностной плотностью теплового потока $q_{по}$ = 50000 Вт/м^2. Коэффициент теплопроводности стали λ = 40 Вт/(м·К), удельная теплоемкость стали C = 700 Дж/(кг·К), плотность стали ρ = 7800 кг/м^3. Температура в центре пластины $t_{цо}$ = 1200 ºС.

Разница температур в пластине:

$$\Delta t_0=\frac{50000\cdot 0{,}2}{2\cdot 40}=125\ ^{\circ}\mathrm{C}.$$

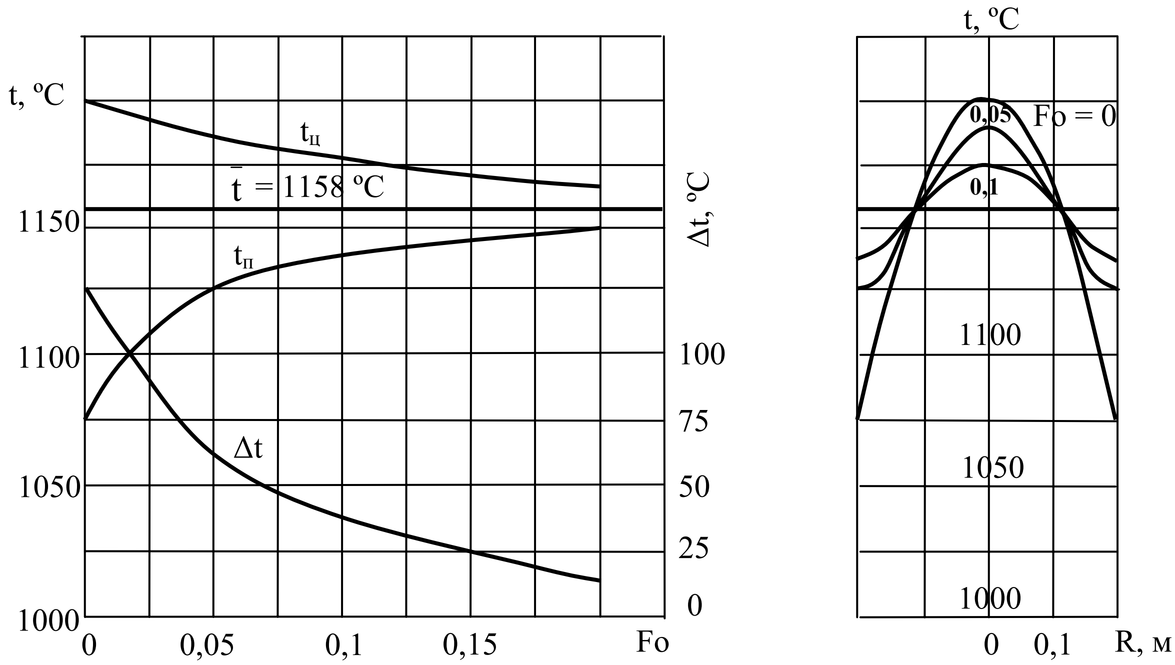
Начальное температурное поле:

$$t(x, 0) = 1200 – 125\,(x/R)^2.$$

Среднемассовая температура и температура поверхности:

$$\bar{t}_0=1200-125/3=1158\ ^{\circ}\mathrm{C}; \quad t_{по} = 1075\ ^{\circ}\mathrm{C}.$$

Результаты расчетов по формулам (4 – 9) представлены на температурных и тепловой диаграммах (рис. 1).



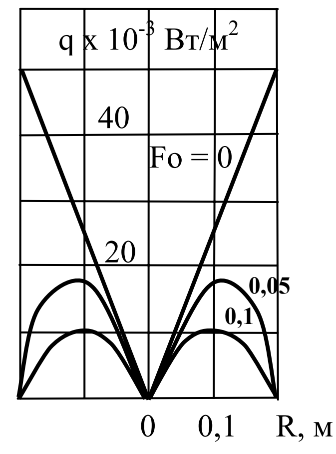


Рис. 1. Температурные и тепловая диаграммы выравнивания температур в пластине после охлаждения ее при условии $q_0 = const = 50000$ Вт/м^2

Вывод

Получены решения для расчета выравнивания температур в теле при постоянном теплосодержании. Приводятся результаты расчета в виде температурных и тепловой диаграмм.

Список литературы

1. Тайц Н.Ю. Технология нагрева стали. – М.: Металлургия, 1962. – 568 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 593 с.

Рукопись поступила 03.06.2008 г.