

*Гичёв Ю.А. – д-р техн. наук, проф., НМетАУ*  
*Перцевой В.А. – аспирант, НМетАУ*

## **АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ СТРУИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

*Анализ энергетических характеристик газовой струи связан с разработкой систем газодинамической отсечки шлака. В результате обобщений экспериментальных данных сделаны постановка задачи и математическое моделирование турбулентной газовой струи. На основе математического моделирования проанализированы энергетические характеристики струи.*

### **Введение**

Анализ энергетических характеристик газовой струи связан с разработкой системы газодинамической отсечки шлака и, в частности, с исследованием запирающих свойств газовой струи [1]. Качественное отделение шлака зависит от газодинамических и энергетических характеристик струи, взаимодействующей с потоком шлака в сталевыпускном отверстии конвертера. Математическое моделирование процесса натекания газовой струи на тупиковый канал, имитирующий летку конвертера, позволит оптимизировать энергетические и геометрические характеристики системы при конструировании устройства газодинамической отсечки шлака.

### **Постановка задачи математического моделирования**

Обобщение экспериментальных данных [2] и получение зависимостей, связывающих геометрические и энергетические характеристики сопла и газовой струи может быть осуществлено на основе теории подобия.

Критериальные зависимости газодинамического подобия течения сжимаемых газовых потоков при фронтальном и боковом натекании струи на тупиковый канал имеют, соответственно, следующий вид:

$$Eu_d = c \cdot La_d^n \cdot Re_0^m \cdot \left( \frac{h}{d_0} \right)^k, \quad (1)$$

$$Eu_D = c \cdot (La_D \cdot Re_0)^n \cdot \left(\frac{h}{d_0}\right)^m \cdot \varphi^k. \quad (2)$$

Критерии подобия, входящие в данное уравнение, имеют следующий вид [3]:

$$Eu_D = \frac{P_{абс}}{\rho_0 \cdot u_0^2}, \quad La_D = \frac{P_{ст} \cdot D}{\mu_0 \cdot u_0}, \quad Re_0 = \frac{u_0 \cdot d_0}{\nu}, \quad (3) - (5)$$

где  $P_{абс}$  – абсолютное давления газа на днище тупикового канала;  $\rho_0$  – плотность газа в выходном сечении сопла;  $P_{ст}$  – статическое давление газа в выходном сечении сопла;  $\mu_0$  – динамический коэффициент вязкости газа в выходном сечении сопла.

Коэффициенты  $c$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $k$  в уравнениях (1) и (2), полученные в результате обработки экспериментальных данных [4], представлены в таблицах 1 и 2.

Однако уравнения (1, 2) не позволяют определить характеристики газового потока во всем объеме тупикового канала. Полная картина движения газа в канале требует математического моделирования процесса.

Таблица 1

Коэффициенты критериальных уравнений при фронтальном натекании струи

Значения критерия Рейнольдса	Коэффициенты	c	n	m	k
$2,51 \cdot 10^4 < Re_0 < 28,4 \cdot 10^4$		$1,8737 \cdot 10^7$	-0,901	-0,2307	-0,54
$22,9 \cdot 10^4 < Re_0 < 25,1 \cdot 10^4$		$1,8752 \cdot 10^7$	-0,901	-0,2307	-0,54
$21,4 \cdot 10^4 < Re_0 < 22,9 \cdot 10^4$		$5,6772 \cdot 10^5$	-0,901	0,0513	-0,54
$Re_0 < 21,4 \cdot 10^4$		$2,669 \cdot 10^4$	-0,901	0,3	-0,54

Таблица 2

Коэффициенты критериальных уравнений при боковом натекании струи

Значения критерия Рейнольдса	Коэффициенты	c	n	m	k
$21,4 \cdot 10^4 < Re_0 < 22,9 \cdot 10^4$		$5,6497 \cdot 10^{23}$	-2,035	-0,558	-0,512
$Re_0 < 21,4 \cdot 10^4$		$5,3613 \cdot 10^{23}$	-2,035	-0,558	-0,72

## Разработка математической модели

При математическом моделировании область отсечки шлака в сталевыпускном отверстии, по аналогии с экспериментом [2], представлялась в виде тупикового канала (см. рисунок 1). Задача моделирования заключалась в определении характера воздействия струи на внутреннюю поверхность канала, что необходимо для конструктивного оформления процесса.

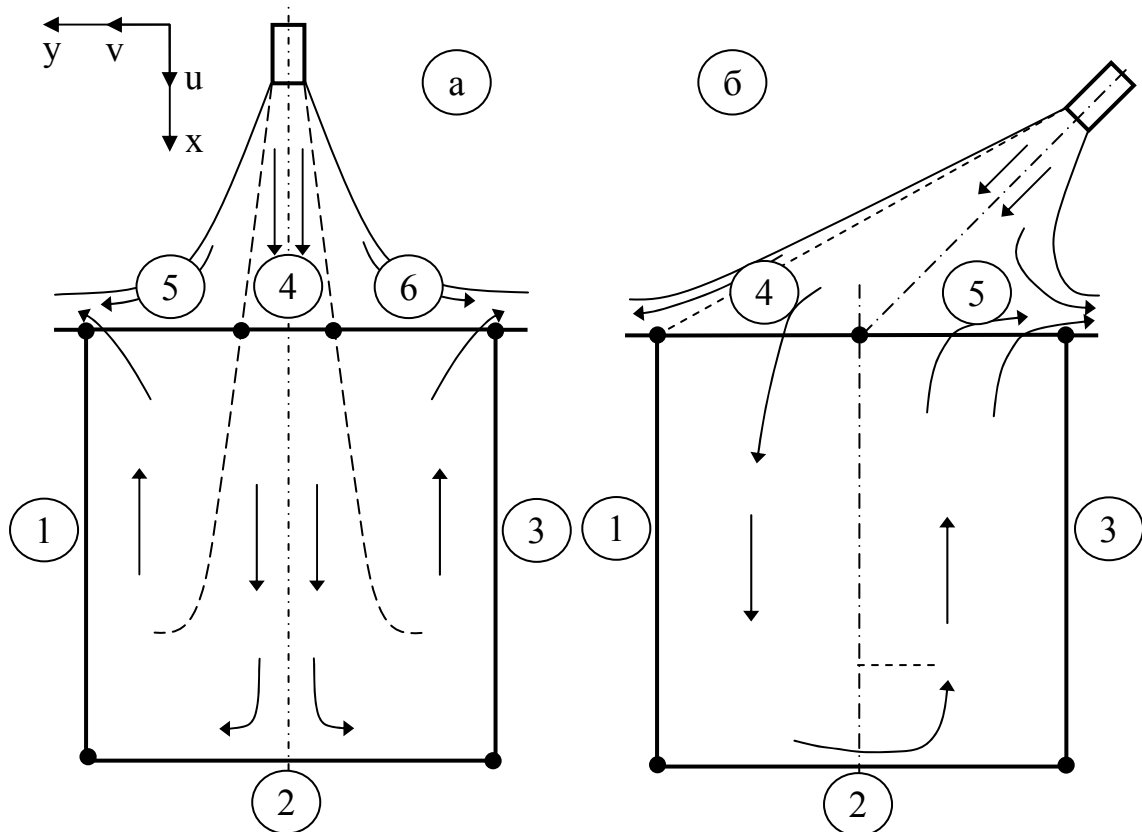


Рис. 1. К расчету энергетических характеристик турбулентной газовой струи:  
 а – фронтальное натекание;  
 б – боковое натекание;  
 1...6 – границы моделирования газовой струи

Для описания движения газа в полости тупикового канала использовались дифференциальные уравнения Эйлера для сжимаемого потока [5]:

$$u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (6)$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = 0; \quad (7)$$

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad (8)$$

$$u \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \kappa \cdot P \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \cdot P \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

где  $u$ ,  $v$  – составляющие скорости вдоль оси абсцисс и ординат соответственно;  $P$  – абсолютное статическое давление в потоке газа;  $\rho$  – плотность газа;  $\kappa$  – показатель адиабаты.

Скорость газа на днище и боковых стенках тупикового канала (границы 1, 2, 3) задавалась равной нулю [5].

На входе газового потока в тупиковый канал (граница 4) задавались значения составляющих скорости  $u$  и  $v$  вдоль координатных осей, а также значение статического давления  $P$  [5].

На границах выхода потока газа из тупикового канала (границы 5 и 6) задавалось значение статического давления в потоке, равное атмосферному, т.к. поток считается полностью расширенным [5].

Решение приведенной выше системы дифференциальных уравнений осуществлялось при помощи одного из методов конечных элементов – методом Галеркина. Решение выполнялось в следующей последовательности.

Область определяемых функций разбивается на двумерные конечные элементы треугольной формы, число которых равно  $E$ , при этом количество узлов всех конечных элементов равно  $n$ .

Выражения для составляющих скорости  $u$  и  $v$ , давления  $P$  и плотности газа  $\rho$  записываются, например, в виде:

$$u = [N_1 \ N_2 \dots N_n] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

где  $N_1, N_2, \dots, N_n$  – функции формы.

Уравнение для  $i$ -го узла конечного элемента при решении его методом Галеркина в общем виде записывается следующим образом [7]:

$$\iint_F N_i \cdot \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \cdot dx \cdot dy = 0, \quad (11)$$

где  $f$  – определяемая функция (в данном случае функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$ ,  $P(x, y)$ ); знак “ $F$ ”, стоящий под интегралом, означает, что интеграл определяется в двумерной области искомой функции.

Таким образом, для  $i$ -го узла элемента записывается система, состоящая из четырех уравнений в соответствии с числом определяемых функций.

Так, например, для определяемой функции  $u$ , уравнение принимает вид:

$$\int_V N_i \cdot \left[ u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cdot dV = 0. \quad (12)$$

После подстановки выражения (10) и аналогичных ему выражений для других определяемых функций в уравнение (12), получается следующая зависимость:

$$\int_V \left[ N_i \cdot u_i \cdot \frac{\partial [N]}{\partial x} \cdot \{\rho\} + N_i \cdot v_i \cdot \frac{\partial [N]}{\partial y} \cdot \{\rho\} + N_i \cdot \rho_i \cdot \frac{\partial [N]}{\partial x} \cdot \{u\} + N_i \cdot \rho_i \cdot \frac{\partial [N]}{\partial y} \cdot \{v\} \right] \cdot dV = 0. \quad (13)$$

Остальные уравнения вида (12) записываются аналогично, в виде системы уравнений стандартной формы [7]:

$$[K] \cdot \{\Phi\} + \{F\} = 0, \quad (14)$$

где  $[K]$  – матрица функций формы для узлов всех конечных элементов;  $\{\Phi\}$  – матрица определяемых функций во всех узлах двумерной области решения;  $\{F\}$  – матрица, содержащая значения сил, действующих на единицу объема газа, а также граничные условия задачи.

В матрице  $[K]$  число строк и столбцов равняется  $n$ , т.е. числу узлов всех конечных элементов, на которые разбивается область определяемых функций, а количество таких матриц определяется числом конечных элементов  $E$

$$[K] = [K]^1 + [K]^2 + \dots + [K]^E, \quad (15)$$

где  $[K]^1, [K]^2, \dots, [K]^E$  – матрицы отдельных конечных элементов.

Каждая матрица конечного элемента имеет размерность  $n \times n$ , однако заполняются в ней только те коэффициенты, которые соответствуют узлам конечного элемента, граничащего с другими элементами. Так, например, для конечного элемента треугольной формы, имеющего три узла, размерность матрицы с ненулевыми коэффициентами составляет  $3 \times 3$ .

При этом коэффициенты матриц отдельных элементов  $[K]^1, [K]^2, \dots, [K]^E$  являются квадратными подматрицами размера  $s \times s$ , где  $s$  – число определяемых функций для узла.

Для данной задачи подматрица  $[K_i]$ , рассматриваемого  $i$ -го узла отдельного конечного элемента записывается следующим образом [7]:

$$[K_i] = \int_V \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 \end{vmatrix} \cdot dV, \quad (16)$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_5$  – выражения для функций формы определяемой функции  $u$  в уравнениях вида (13);  $v_1, v_2, \dots, v_5$ ;  $P_1, P_2, \dots, P_5$ ;  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_5$  – соответствующие выражения для функций форм для других определяемых функций.

Матрица узловых значений определяемых функций  $\{\Phi\}$  для  $i$ -го узла записывается в следующем виде [7]:

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ P_i \\ \rho_i \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Аппроксимация искомых функций в области решения  $F$  и на границе этой области  $S$  осуществляется в виде множества кусочных функций, определяемых внутри каждого конечного элемента, на которые разбивается область решения  $F$  (см. рисунок 2).

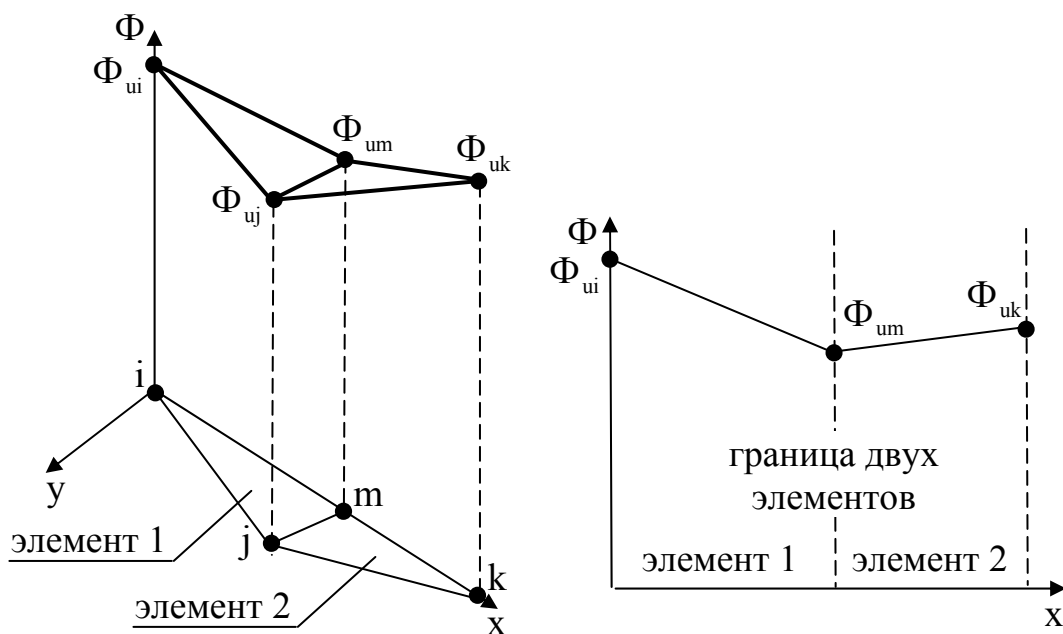


Рис. 2. Непрерывность функции  $u$  вдоль общей границы для двух треугольных элементов

В данной задаче двумерная область решения разбивается на треугольные симплекс-элементы, которым соответствуют полиномы, содержащие константу и линейные члены. Число коэффициентов в таком полиноме на единицу больше размерности координатного пространства области решения. Вследствие этого симплексная функция для двумерного треугольного элемента записывается в виде [6]:

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y, \quad (18)$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  – константы.

Приведенный выше полином линеен (по  $x$  и  $y$ ), и содержит три коэффициента по числу узлов, которые располагаются в вершинах треугольного элемента.

Узлу  $i$  соответствуют координаты  $(X_i, Y_i)$ . Два других узла конечного элемента обозначаются  $j$  и  $m$ . Эти узлы имеют, соответственно, координаты  $(X_j, Y_j)$  и  $(X_m, Y_m)$ . Для  $i$ -го узла значения величин определяемых функций  $u$ ,  $v$ ,  $p$  и  $r$  обозначаются как  $\Phi_{ui}$ ,  $\Phi_{vi}$ ,  $\Phi_{pi}$  и  $\Phi_{ri}$ .

В узлах конечного элемента, например, для функции продольной составляющей скорости  $u$  и узла  $i$  выполняются следующие условия:

$$f = \Phi_{ui} \text{ при } x = X_i \text{ и } y = Y_i. \quad (19)$$

Подстановка таких условий в выражение (18) приводит к следующей системе уравнений вида:

$$\Phi_{ui} = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot X_i + \alpha_3 \cdot Y_i. \quad (20)$$

Решение системы уравнений (15) дает выражения для констант  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  [6].

После подстановки значений  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  формула (18) преобразуется к виду [6]:

$$f \equiv u = N_i \cdot \Phi_{ui} + N_j \cdot \Phi_{uj} + N_m \cdot \Phi_{um}. \quad (21)$$

Уравнение (21) определяет конечный элемент, поскольку содержит три функции формы в соответствии с числом узлов элемента.

Для краткости изложения рассмотрим только функцию формы  $N_i$ , которая необходима для нахождения значения функции в узле  $i$ .

Подстановка значений  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  в формулу (18) и группировка слагаемых, относящихся к значению  $\Phi$  искомой функции  $u$  в узле  $i$ , дает выражение для функции формы  $N_i$ :

$$N_i = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot [X_j \cdot Y_m - X_m \cdot Y_j + (Y_j - Y_m) \cdot x + (X_m - X_j) \cdot y]. \quad (22)$$

Величина  $(2 \cdot A)$  в константах  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  равна определителю матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_m & Y_m \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Аналогичным образом получают выражения для функций формы  $N_j$  и  $N_m$ .

Выражения для функций формы определяемой функции  $u$  имеют следующий вид:

$$u_1 = N_i \cdot \rho_i \cdot \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial x} \right); \quad (24)$$

$$u_2 = N_i \cdot u_i \cdot \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial x} \right) + N_i \cdot v_i \cdot \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \right); \quad (25)$$

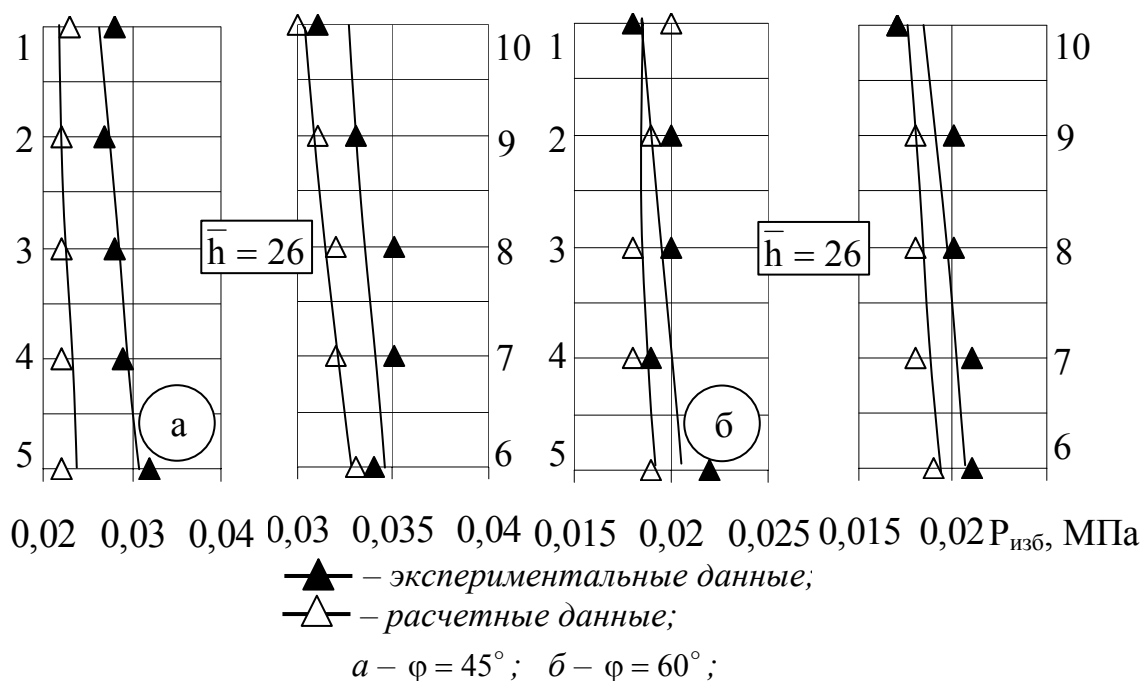
$$u_3 = 0; \quad u_4 = N_i \cdot k \cdot P_i \cdot \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial x} \right). \quad (26, 27)$$

Для других узлов конечных элементов выполняется аналогичная процедура преобразований. Затем осуществляется решение системы уравнений (14).

### Проверка адекватности математической модели

Адекватность математической модели процесса истечения газовой струи в тупиковый канал реальному процессу выполнена путем сравнения результатов математического моделирования с результатами экспериментального исследования [2]. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными представлено на рисунке 3. В целом расхождение теоретических и экспериментальных данных по всем режимам запыряния шлака не превысило 21 %, что для такого класса задач является вполне удовлетворительным.





1...5 и 6...10 на оси ординат графиков- точки измерения давления.  
 Рис. 3. Сравнение давлений газовой струи на внутреннюю поверхность тупикового канала (давление перед соплом  $P_c = 0,9$  МПа) при боковом натекании струи

### Пример использования математической модели

Исследования процесса движения газовой струи в объеме тупикового канала выполнены расчетным путем с использованием разработанной математической модели.

В данном случае основной задачей расчетно-теоретического исследования являлось определение размеров области течения газа вблизи днища канала ( $H_{\text{стаб}}$ ), где наблюдается выравнивание и стабилизация характеристик потока на уровне, обеспечивающем надежную газодинамическую отсечку шлака. Расчеты выполнены для сталевого пускового отверстия конвертера диаметром  $D = 0,175 \div 0,300$  м, диаметр выходного отверстия сопла варьировался в пределах  $d_0 = 0,06 \div 0,08$  м, угол между осью сопла и осью сталевого пускового отверстия изменялся в интервале  $\varphi = 0 \div 60^\circ$ . Результаты математического моделирования приведены на рисунке 4.  $H_{\text{стаб}}$  отсчитывается от днища тупикового канала. Верхняя линия  $H_{\text{стаб}}$  соответствует  $\varphi = 0^\circ$ , а нижняя  $\varphi = 60^\circ$

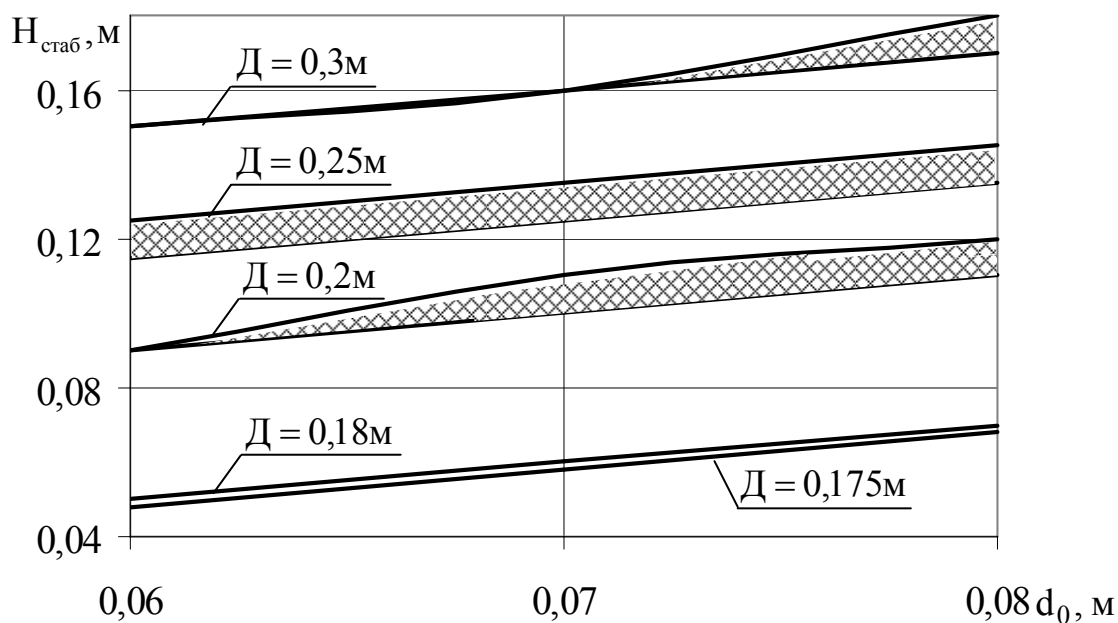


Рис. 4. Размер области выравнивания и стабилизации характеристик газового потока в объеме тупикового канала

Анализ данных, приведенных на рисунке 4, позволяет сделать следующие выводы:

- область выравнивания и стабилизации характеристик газового потока практически не зависит от угла наклона оси струи относительно тупикового канала;
- при прочих одинаковых условиях область возрастает пропорционально увеличению диаметра выходного сечения сопла и уменьшается с увеличением диаметра тупикового канала;
- относительная высота области стабилизации характеристик газового потока составляет  $12 \div 20\%$  от высоты тупикового канала.

Таким образом, разработанная математическая модель позволяет определить энергетические свойства газового потока на стадии торможения и удержания слоя шлака над леткой конвертера. Оценка таких свойств необходима при разработке режимов работы системы газодинамической отсечки шлака, поскольку дает возможность регулировать высоту оттеснения шлака путем изменения диаметра сопла и давления газа перед ним.

### Выводы

Приведены результаты обобщения экспериментальных данных в виде критериальных уравнений для определения давления газа на днище тупикового канала при фронтальном и боковом натекании струи.

Разработана математическая модель истечения газовой струи в сталевыпускное отверстие конвертера, позволяющая определить давление газовой струи на слой запираемого шлака при его газодинамической отсечке. Показана адекватность математической модели реальному процессу путем сравнения результатов расчета с экспериментальными данными. Расхождение между теоретическими и экспериментальными данными по всем режимам запираания шлака не превышает 21 %.

На примере натекания струи на сталевыпускное отверстие с использованием разработанной математической модели определены размеры области течения газа вблизи днища канала, где наблюдается выравнивание и стабилизация характеристик потока на уровне, обеспечивающем надежную газодинамическую отсечку шлака. Результаты исследования могут быть использованы для конструирования устройства газодинамической отсечки шлака и разработки режимов его эксплуатации.

### Список литературы

1. Гичёв Ю.А. Исследование газодинамической отсечки шлака при выпуске стали из конвертера // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2002. – № 7. – С. 170 – 173.
2. Гичёв Ю.А., Перцевой В.А. Экспериментальное исследование запирающих свойств газовой струи // *Металургійна теплотехніка: Збірник наукових праць НМетАУ*. – Дніпропетровськ: «ПП Грек О.С.», 2006. – С. 68 – 76.
3. Гречко А.В., Нестеренко Р.Д., Кудинов Ю.А. Практика физического моделирования на металлургическом заводе. – М.: *Металлургия*, 1976. – 224 с.
4. Гичёв Ю.А., Перцевой В.А. Применение теории подобия для обобщения экспериментальных данных по втеканию газовой струи в тупиковый канал // *Матеріали регіональної наукової конференції «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу»*. – Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет, 2006. – С. 32 – 33.
5. Donea J., Huerta A. *Finite element methods for flow problems*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2003. – 350 p.
6. Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов*. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
7. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

*Рукопись поступила 15.03.2008 г.*