

Дремов В.В. – канд. физ.-мат. наук, доц., ДонНАСА

Недопекин Ф.В. – д-р техн. наук, проф., ДонНУ

Роговец О.В. – студентка, ДонНУ

ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ В ОТЛИВКАХ С ОБРАТНОЙ КОНУСНОСТЬЮ

Методом, основанным на понятии локального термодинамического потенциала с последующим привлечением вариационного исчисления и частичного интегрирования, решена задача о движении фронта затвердевания жидкого металла в плоской клинообразной изложнице с обратной конусностью, то есть слитков, уширенных книзу.

Введение

Повышение выхода годного металла, вследствие уменьшения головной обрезки слитков, достигается применением слитков, уширенных книзу, то есть с обратной конусностью. Известны численные решения для таких слитков [1, 2], в которых исследуются явления теплопереноса, структура конвективных течений, распределение доли твердой фазы и влияние теплоизолирующих вкладышей в верхней части слитка на процесс затвердевания. В предлагаемой работе аналитическими методами исследуется движение фронта затвердевания в изложницах с обратной конусностью.

Постановка задачи

Основываясь на результатах работы [3], рассмотрим затвердевание металла в плоской клинообразной изложнице, боковые поверхности которой располагаются под малыми углами α относительно вертикальной координаты, а сверху и снизу область ограничена цилиндрическими поверхностями с радиусами R_1 и R_2 (рис. 1). Для решения задачи используется цилиндрическая система координат (r, φ, z) .

На торцевой поверхности $r = R_2$ полагаем $T = T_n = \text{const}$ меньше температуры кристаллизации T_k . На поверхности $r = R_1$ принимаем $T_n = \text{const}$. Плоскость $\varphi = \alpha$ ограничивает область кристаллизации сбоку и при $t \geq 0$ она имеет температуру T_n . При $t > 0$ начинается процесс кристаллизации и на фронте кристаллизации $T = T_k$.

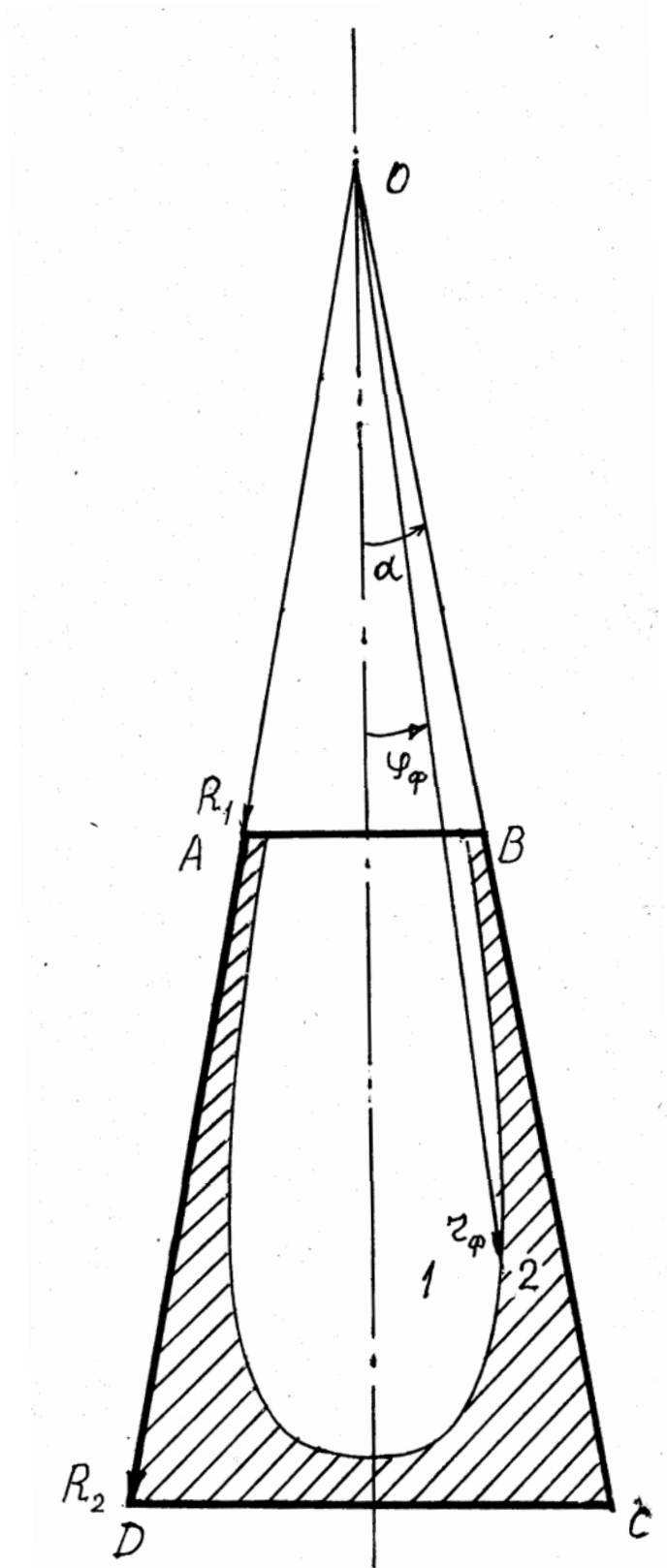


Рис. 1. Поперечное сечение изложницы с обратной конусностью

Задача считается бесконечной по z , поэтому температура и скорость не зависят от z . Вследствие малого угла между осью и боковой стенкой изложницы пренебрегаем поперечной составляющей скорости v_φ . Тогда уравнение теплопереноса, записанное для области жидкого металла, примет вид

$$\rho_1 c_{V1} \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = \lambda_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (1)$$

Здесь $0 < \varphi < \varphi_\phi$, $R_1 < r < r_\phi$.

Аналогичное уравнение при $v_r = 0$ будет описывать температурное поле в твердой фазе

$$\rho_2 c_{V2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} \right) = \lambda_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (2)$$

для области $\varphi_\phi < \varphi < \alpha$, $r_\phi < r < R_2$.

Толщину затвердевшей корки для любого радиуса можно найти по формуле

$$\varepsilon(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = r_\phi(t_\phi) [\alpha - \varphi_\phi(t_\phi)]. \quad (3)$$

Считается, что хорда совпадает с дугой при малых длинах дуги, что соответствует малому углу α .

В момент $t = 0$ твердая фаза отсутствует, а $T_1(r, \varphi, 0) = T_n$ при $R_2 > r > R_1$ и $\alpha > \varphi > 0$. При $\varphi = \alpha$, $r = R_1$ и $t > 0$ имеем

$$T_1(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_\kappa; \quad (4)$$

$$T_2(r, \alpha, t) = T_n. \quad (5)$$

На фронте кристаллизации тепловой контакт считается идеальным, поэтому при $r = r_\phi(t)$ и $\varphi = \varphi_\phi(t)$ температуры жидкости и твердой фазы равны температуре кристаллизации.

$$T_1(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_2(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_\kappa. \quad (6)$$

На движущемся фронте фазового перехода выделяется скрытая теплота кристаллизации L_1 , которая отводится через твердую фазу вместе с теплом перегрева [4]. Следовательно,

$$\lambda_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \right)_\phi = L_1 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right)_\phi. \quad (7)$$

Это уравнение теплового баланса на фронте кристаллизации служит для определения $\varepsilon(t)$.

Из уравнений (1 – 3) и граничных условий (4 – 7) следует найти три неизвестные функции $T_1(r, \varphi, t)$, $T_2(r, \varphi, t)$, $\varepsilon(t)$.

Решение задачи

Уравнение (1) можно переписать, вводя коэффициент теплопроводности $a_1 = \lambda_1 / \rho_1 c_{V1}$ в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \nu_r \frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (8)$$

Приближенное решение по r представим в виде линейной функции по r :

$$T_1 = T_n - \frac{r - R_1}{r_\phi - R_1} (T_n - T_\kappa). \quad (9)$$

Решение (8) ищем вариационным методом, постепенно усложняя задачу. Вначале найдем зависимость по φ для стационарного случая

$$\nu_r \frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (10)$$

Опуская индекс 1 при температуре и обозначая производные в виде $T_r = \partial T / \partial r$, $T_{\varphi\varphi} = \partial^2 T / \partial \varphi^2$, $T_{rr} = \partial^2 T / \partial r^2$, получим

$$\frac{\nu_r}{a_1} r T_r - T_r - r T_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi} = 0. \quad (11)$$

Функционал, соответствующий уравнению (11) запишем в виде

$$\int_{R_2}^{r_\phi} \int_0^{\varphi_\phi} \left[2 \frac{\nu_r}{a_1} r T_r^0 T + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 \right] dr d\varphi = L, \quad (12)$$

где $T_r^0 = \partial T^0 / \partial r$, а индекс 0 при T_r обозначает неварьируемую производную от температуры.

Ищем функцию, минимизирующую функционал (12), в виде

$$T = T(r) f(\varphi) = \left[T_n - \frac{r - R_1}{r_\phi - R_1} (T_n - T_\kappa) \right] f(\varphi). \quad (13)$$

Вычисляя производные по r и φ от (13), получаем

$$T_r = \frac{T_n - T_\kappa}{r_\phi - R_1} f(\varphi), \quad T_\varphi = \left[T_n - \frac{r - R_1}{r_\phi - R_1} (T_n - T_\kappa) \right] f'(\varphi). \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (12) и интегрируя по r , находим

$$\int_0^{\varphi_\phi} \left\{ A_1 f^0(\varphi) f(\varphi) + E f^2(\varphi) + B [f'(\varphi)]^2 \right\} d\varphi = L, \quad (15)$$

где A_1, E, B – константы интегрирования по r .

Функция $f(\varphi)$ выбирается так, чтобы интеграл (15) был минимальным. Этому условию удовлетворяет функция, обращающая в

нуль вариацию, что соответствует выполнению уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial f(\varphi)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial L}{\partial f'(\varphi)} \right) = 0. \quad (16)$$

Взяв вариацию, получим

$$f''(\varphi) - \frac{A}{B} f(\varphi) = 0, \quad (17)$$

где $A = \frac{A_1}{2} + E$.

Решением (17) будет функция [5]

$$f(\varphi) = C_1 \operatorname{ch} \varphi \sqrt{\frac{A}{B}} + C_2 \operatorname{sh} \varphi \sqrt{\frac{A}{B}}. \quad (18)$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из граничных условий для функции $f(\varphi)$: $T = T_k$ при $\varphi = \varphi_\phi$, $\partial T / \partial \varphi = 0$ при $\varphi = 0$. Учитывая их в (18) и вычисляя, получим $C_2 = 0$,

$$C_1 = 1 / \left(\operatorname{ch} \varphi_\phi \sqrt{A/B} \right).$$

Подставляя их в (18), а последнее в (13), находим решение уравнения (11)

$$T = \frac{[T_n(r_\phi - r) + T_\kappa(r - R_1)] \operatorname{ch} \varphi \sqrt{\frac{A}{B}}}{(r_\phi - R_1) \operatorname{ch} \varphi_\phi \sqrt{\frac{A}{B}}}. \quad (19)$$

Поиск решения полного нестационарного уравнения теплопроводности осуществляется тем же методом, что и при нахождении зависимости по φ . Функционал, соответствующий уравнению (8), имеет вид

$$L = \int_0^{t_\phi} \int_0^{\varphi_\phi} \int_{R_2}^{r_\phi} \left[2 \frac{\nu_r}{a_1} r T_r^0 T + 2 \frac{r}{a_1} T T_t^0 + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 \right] dr d\varphi dt. \quad (20)$$

Решение (8) ищем в виде функции (19), умноженной на неизвестную функцию $f(t)$:

$$T = \frac{[T_n(r_\phi - r) + T_\kappa(r - R_1)] \operatorname{ch} \varphi \sqrt{\frac{A}{B}}}{(r_\phi - R_1) \operatorname{ch} \varphi_\phi \sqrt{\frac{A}{B}}} f(t). \quad (21)$$

Подстановка (21) в (20) и интегрирование по r и φ дает

$$L = \int_0^{t_\phi} \left\{ K f^0(t) f(t) + M f(t) [f'(t)]^0 + P f^2(t) + Q f^2(t) \right\} dt, \quad (22)$$

где K, M, P, Q – константы интегрирования по r и φ в области жидкой фазы.

Взяв вариацию от (22) по $f(t)$ и приравняв её нулю, получим

$$Mf'(t) + G_1f(t) = 0.$$

Решением этого уравнения будет функция

$$f(t) = C \exp(-G_1t/M). \quad (23)$$

Постоянную C найдем из условия на фронте кристаллизации

$$T_1(r = r_\phi, \varphi = \varphi_\phi, t = t_\phi) = T_\kappa. \quad (24)$$

Для этого запишем решение нестационарной задачи

$$T_1 = \left[\frac{[T_n(r_\phi - r) + T_\kappa(r - R_1)]ch\varphi\sqrt{\frac{A}{B}}}{(r_\phi - R_1)ch\varphi_\phi\sqrt{\frac{A}{B}}} \right] \cdot C \exp\left(-\frac{G_1}{M}t\right). \quad (25)$$

Учитывая (24) в (25), получим $C = \exp(G_1t_\phi/M)$.

Следовательно, решением уравнения будет функция

$$T_1 = \left[\frac{[T_n(r_\phi - r) + T_\kappa(r - R_1)]ch\varphi\sqrt{\frac{A}{B}}}{(r_\phi - R_1)ch\varphi_\phi\sqrt{\frac{A}{B}}} \right] \cdot \exp\left(-\frac{G_1}{M}(t - t_\phi)\right). \quad (26)$$

Точно так же найдем распределение температуры в твердой области слитка. Для этого уравнение (2) разделим на ρ_2c_{V2} и введем температуропроводность твердого металла: $a_2 = \lambda_2 / \rho_2c_{V2}$. С учетом этого уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = a_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (27)$$

Применяя граничные и начальные условия в виде $T_2 = T_\kappa$ при $r = r_\phi, \varphi = \varphi_\phi, t = t_\phi$; $T_2 = T_n$ при $\varphi = \alpha$ и $r = R_2$ и используя вариационную формулировку в сочетании с методом частичного интегрирования, получим

$$T_2 = \left[T_\kappa - \frac{r - r_\phi}{R_2 - r_\phi} (T_\kappa - T_n) \right] \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} \left[(\alpha - \varphi) \sqrt{\frac{A_2}{B_2}} \right] + \operatorname{sh} \left[(\varphi - \varphi_\phi) \sqrt{\frac{A_2}{B_2}} \right]}{\operatorname{sh} \left[(\alpha - \varphi_\phi) \sqrt{\frac{A_2}{B_2}} \right]} \exp \left[-\frac{2G_2(t - t_\phi)}{F_2} \right]. \quad (28)$$

Для вычисления скорости кристаллизации перепишем уравнение (7) в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{L_1 \rho} \left[\lambda_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \right)_\phi - \lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right)_\phi \right], \quad (29)$$

Вычислим производные по φ от выражений (26) и (28) и подставим их в (29). Используя условие на фронте кристаллизации (3), найдем скорость кристаллизации по радиусу

$$r_\phi \frac{dr_\phi}{dt} (\alpha - \varphi_\phi) =$$

$$= \frac{T_\kappa}{L_1 \rho} \left\{ -\lambda_2 \sqrt{\frac{A_2}{B_2}} \frac{1 - \operatorname{ch} \left[(\alpha - \varphi_\phi) \sqrt{\frac{A_2}{B_2}} \right]}{\operatorname{sh} \left[(\alpha - \varphi_\phi) \sqrt{\frac{A_2}{B_2}} \right]} + \lambda_1 \sqrt{\frac{A_2}{B_2}} \frac{\operatorname{sh} \varphi_\phi \sqrt{\frac{A_2}{B_2}}}{\operatorname{ch} \varphi_\phi \sqrt{\frac{A_2}{B_2}}} \right\}. \quad (30)$$

Приведем вид выражений A , B , A_2 , B_2 , необходимых для численных расчетов:

$$B = T_n^2 \ln \frac{r_\phi}{R_1} - 2T_n (T_n - T_\kappa) \left(1 - \frac{R_1}{r_\phi - R_1} \ln \frac{r_\phi}{R_1} \right) +$$

$$+ (T_n - T_\kappa)^2 \left[\frac{R_1^2 \ln \frac{r_\phi}{R_1}}{(r_\phi - R_1)^2} - \frac{3R_1 - r_\phi}{2(r_\phi - R_1)} \right],$$

$$A = \frac{\nu_r}{2a_1} (T_n - T_\kappa) \left[T_n (r_\phi + R_1) - \frac{T_n - T_\kappa}{3} (R_1 + 2r_\phi) \right] +$$

$$+ \frac{(T_n - T_\kappa)^2}{2} \left(\frac{r_\phi + R_1}{r_\phi - R_1} \right),$$

$$\begin{aligned}
B_2 = T_{\kappa}^2 \ln \frac{R_2}{r_{\phi}} - 2T_{\kappa}(T_{\kappa} - T_n) \left(1 - \frac{r_{\phi}}{R_2 - r_{\phi}} \ln \frac{R_2}{r_{\phi}} \right) + \\
+ (T_{\kappa} - T_n)^2 \left[\frac{r_{\phi}^2 \ln \frac{R_2}{r_{\phi}}}{(R_1 - r_{\phi})^2} - \frac{3r_{\phi} - R_2}{2(R_2 - r_{\phi})} \right], \\
A_2 = \frac{(r_{\phi} + R_2)(T_{\kappa} - T_n)^2}{2(R_2 - r_{\phi})}.
\end{aligned}$$

Результаты решения

Если зафиксировать в (30) $(\alpha - \varphi_{\phi})$, то получим зависимость $r_{\phi}(t)$ на данном значении угла

$$r_{\phi} \frac{dr_{\phi}}{dt} = \frac{T_{\kappa}}{L_1 \rho (\alpha - \varphi_{\phi})} C^*, \quad (31)$$

где C^* обозначает выражение в фигурных скобках (30).

Решая уравнение (31), находим

$$r_{\phi} = \sqrt{-\frac{2T_{\kappa}C^*}{L_1 \rho (\alpha - \varphi_{\phi})} t + R_2^2}, \quad (32)$$

где учтено, что $r_{\phi} = R_2$ при $t = 0$.

Выводы

Для разных углов φ_{ϕ} и моментов времени были выполнены вычисления координат фронта кристаллизации стального слитка при следующих численных значениях размеров изложницы и параметров жидкой и твердой стали: $R_1=3,4$ м, $R_2=5,4$ м, $\alpha=10^\circ$, $T_n=1833$ К, $T_{\kappa}=1733$ К, $T_n=1433$ К, $\nu_r=10^{-2}$ м/с, $a_1=4,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda_1=26,5$ Вт/(м·К), $\lambda_2=30,3$ Вт/(м·К), $\rho=7,31 \cdot 10^3$ Кг/м³, $L_1=2,72 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Для моментов времени $t = 1; 5; 10; 20; 50; 100; 400; 600; 10^3; 2 \cdot 10^3; 2,2 \cdot 10^3$ с получены графики зависимости $r_{\phi}(\varphi_{\phi})$ в левой половине изложницы. Из анализа графиков следует, что затвердевание металла в изложнице идет вначале быстро, а затем замедляется в соответствии с законом квадратного корня. Следует отметить, что затвердевание металла вблизи угла изложницы происходит быстрее, чем в области боковой стенки и дна. Кроме того, в конце затвердевания наблюдается глубокая жидкая лунка по оси слитка, которая может привести к образованию усадочных раковин.

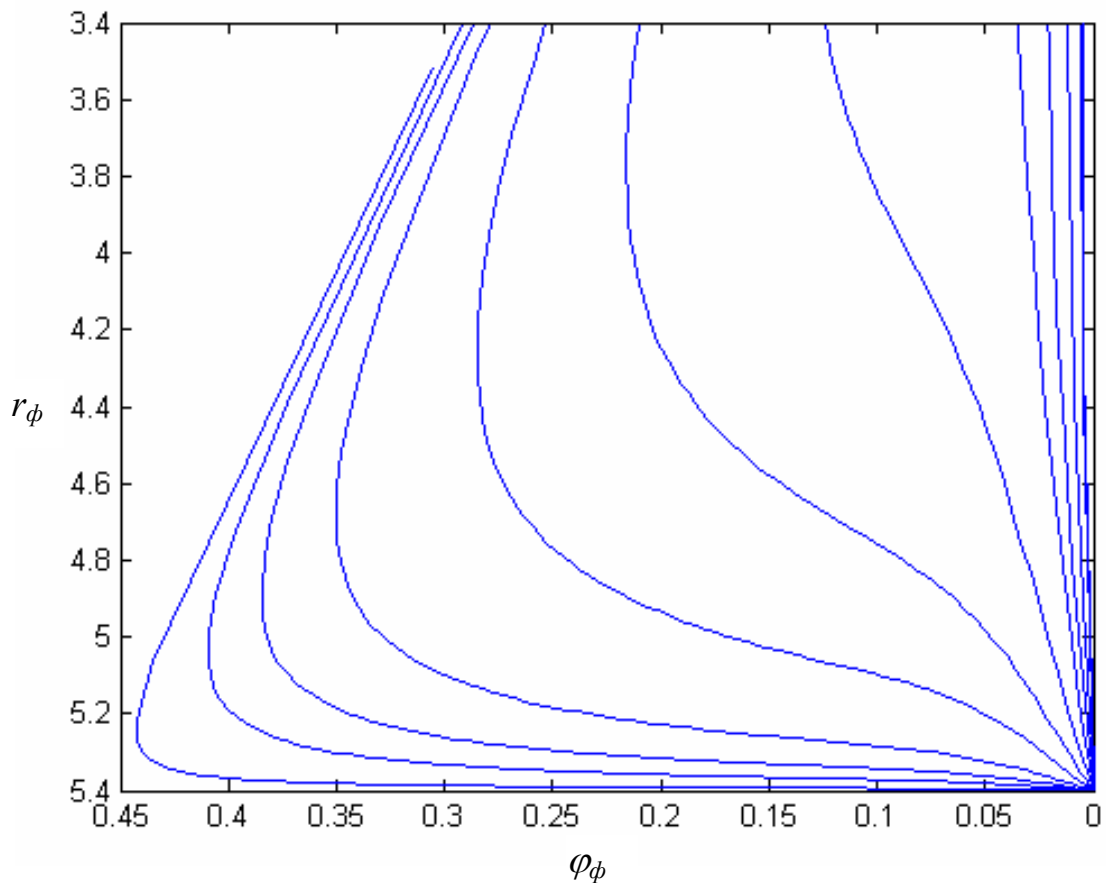


Рис. 2. Положение фронта затвердевания в левой половине изложницы с обратной конусностью для слитка высотой 2 м и шириной дна 0,9 м для моментов времени $t = 1; 5; 10; 20; 50; 100; 400; 600; 10^3; 2 \cdot 10^3; 2,2 \cdot 10^3$ с. Отсчет кривых идет слева направо соответственно времени

Обозначения

α – угол конусности боковых стенок изложницы, град; R_1 и R_2 – верхний и нижний радиусы изложницы, м; r , φ , z – цилиндрические координаты точек внутри изложницы; T_1 и T_2 – температуры внутри жидкого и твердого металлов, К; T_k – температура кристаллизации, К; T_n – температура дна и боковой поверхности изложницы, К; T_n – начальная температура заливки, К; t – время, с; v_φ и v_r – азимутальная и радиальная составляющие скорости жидкого металла, м/с; ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкого и твердого металлов, кг/м³; ρ – средняя плотность металла, кг/м³; c_{V1} и c_{V2} – удельные теплоемкости жидкого и твердого металла, Дж/(кг·К); λ_1 и λ_2 – теплопроводности жидкого и твердого металла, Вт/(м·К); φ_ϕ и r_ϕ – азимутальная и радиальная координаты точки на фронте затвердевания; t_ϕ – время на фронте кри-

сталлизации, с; L_1 – теплота кристаллизации, Дж/кг; ε – толщина затвердевшей корки, м; a_1 и a_2 – температуропроводности жидкого и твердого металла, $\text{м}^2/\text{с}$; T_r^0 и T_t^0 – неварьируемые производные от температуры по радиусу и по времени; T – функция температуры; T_r и T_{rr} – первая и вторая производные от температуры по радиусу; T_φ и T_t – первые производные от температуры по углу и по времени; $T_{\varphi\varphi}$ – вторая производная от температуры по углу; L – функционал или лагранжиан; A_1, E, B, A_2, B_2 – константы интегрирования по радиусу; δL – вариация функционала; $f(\varphi)$ – функция от угла; $f'(\varphi)$ и $f''(\varphi)$ – первая и вторая производные по φ ; C_1, C_2 – константы интегрирования по углу; $K, M, P, Q, G_1, M, G_2, F_2$ – константы интегрирования по r и φ . Индексы: n – поверхность; k – кристаллизация; n – начальный; ϕ – фронт.

Список литературы

1. Недопекин Ф.В. Математическое моделирование гидродинамики и тепломассопереноса в слитках. – Ижевск, 1995. – 170 с.
2. Самойлович Ю.А., Тимошпольский В.И., Трусова И.А. Филиппов В.В. Стальной слиток. – Т. 2.. – Минск: «Белорусская наука», 2000 – 354 с.
3. Дремов В.В., Недопекин Ф.В. Аналитический расчет затвердевания расплава в изложнице // ИФЖ. – 2002. – Т. 75. – № 6. – С. 179 – 184.
4. Любов Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах. – М., 1975. – 20 с..
5. Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М., 1971. – 365 с.

Рукопись поступила 01.03.2008 г.